



Einführung in die formale Logik I

Frühjahrssemester 2019

Vorlesung 5

Prof. Dr. Katia Saporiti

**Achtung:
Die Übung am 3. April
muss leider entfallen!**

Aussagenlogik / Junktorenlogik (*propositional logic*)

- I. Satzoperatoren und -konstituenten
- II. Wahrheitstabeln (Wahrheitwerttabellen)
- III. Wahrheitsfunktionalität
- IV. Aussagenlogische Junktoren
 - Negation
 - Konjunktion
 - Adjunktion
 - Materiale Implikation (Konditional)
 - Bikonditional
 - Kontravalenz (Disjunktion)
- V. Zurückführungen von Junktoren auf Negation und Konjunktion (bzw. Adjunktion)

Satzoperatoren und -konstituenten

Komplexe Sätze können in *Operatoren* und *Konstituenten* zerlegt werden. Beispiele:

- Karla geht ins Theater und Heinz geht ins Kino.*
- Otto ist krank oder er hat den Termin vergessen.*
- Es ist nicht der Fall, dass Marlene fliegen kann.*

	Satzoperator	Satzkonstituente(n)	
a)	... und ...	Karla geht ins Theater. Heinz geht ins Kino.	zweistellig
b)	... oder ...	Otto ist krank. Otto hat den Termin vergessen.	zweistellig
c)	Es ist nicht der Fall, dass ...	Marlene kann fliegen.	einstellig

... Satzoperatoren und -konstituenten (Fortsetzung)

- **Satzoperatoren** sind Ausdrücke, mit denen aus einem Satz oder aus mehreren Sätzen neue Sätze gebildet werden.
- **Satzkonstituenten** sind die Sätze, aus denen mit Hilfe der Satzoperatoren neue Sätze gebildet werden.
- Die Struktur von Sätzen (ihre Zerlegung in Operatoren und Konstituenten) lässt sich mit Hilfe von Variablen angeben.

- Karla geht ins Theater **und** Heinz geht ins Kino.*
- Otto ist krank **oder** er hat den Termin vergessen.*
- Es ist nicht der Fall, dass** Marlene fliegen kann.*
- Wenn** Karlchen brav ist, **dann** bekommt er ein Eis.*

- | | |
|--|---|
| a) A und B. | a) A: Karla geht ins Theater. B: Heinz geht ins Kino. |
| b) A oder B. | b) A: Otto ist krank. B: Otto hat den Termin vergessen. |
| c) Es ist nicht der Fall, dass A. | c) A: Marlene kann fliegen. |
| d) Wenn A, dann B. | d) A: Karlchen ist brav. B: Karlchen bekommt ein Eis. |

- e. *Er ist ein Betrüger und jeder weiss, dass er ein Betrüger ist.*
 f. *Karlsson kann fliegen und jeder weiss, dass Fliegen schwer ist.*
 g. *Der Film war gut gemacht, aber er hat mich gelangweilt und enthielt sehr grausame Szenen.*

	Operator	Konstituente(n)	
e)	A und jeder weiss, dass A.	A: Er ist ein Betrüger.	<i>einstellig</i>
f)	A und jeder weiss, dass B.	A: Karlsson kann fliegen. B: Fliegen ist schwer.	<i>zweistellig</i>
g)	A, aber B und C.	A: Der Film war gut gemacht. B: Der Film hat mich gelangweilt. C: Der Film enthielt sehr grausame Szenen.	<i>dreistellig</i>
g)*	A, aber B.	A: Der Film war gut gemacht. B: Der Film hat mich gelangweilt und enthielt sehr grausame Szenen.	<i>zweistellig</i>

Die Zerlegung von Sätzen in Satzoperatoren und Satzkonstituenten ist in folgendem Sinn nicht eindeutig:
 Viele Sätze können auf mehr als eine Weise zerlegt werden.

Wahrheitstafeln (Wahrheitwerttabellen)

Beispielsatz:

Karla geht ins Theater und Heinz geht ins Kino.

Satzoperator: *... und ...*

Satzkonstituenten:

A: Karla geht ins Theater.

B: Heinz geht ins Kino.

A	B	A und B
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

- (Satzoperatoren sind Ausdrücke, mit denen aus einem Satz oder aus mehreren Sätzen neue Sätze gebildet werden.)
- (Satzkonstituenten sind Sätze, die wahr oder falsch sind und aus denen mit Hilfe der Satzoperatoren neue Sätze gebildet werden.)
- Eine **Wahrheitstafel** gibt die möglichen **Wahrheitswertverteilungen** auf die Konstituenten und den Satz an.
- Für einen zweistelligen Operator gibt es 4 mögliche Wahrheitswertverteilungen.
- Bei 2 Wahrheitswerten hat ein n-stelliger Operator 2^n mögliche Wahrheitswertverteilungen. In jeder Zeile wird eine dieser Verteilungen angegeben.
- Die letzte Spalte gibt (von oben nach unten gelesen) den **Wahrheitswertverlauf** für den Operator an: w, f, f, f

Wahrheitsfunktionalität

- Satzoperatoren, für die der Wahrheitswert des komplexen Satzes durch die Wahrheitswerte der Konstituenten eindeutig bestimmt ist, nennt man **wahrheitsfunktionale** Operatoren.
- (Sätze, die in einen wahrheitsfunktionalen Operator und Konstituenten zerlegt werden können, haben einen Wahrheitswert, der eine Funktion der Wahrheitswerte dieser Konstituenten ist.)
- Satzoperatoren, für die der Wahrheitswert des komplexen Satzes bei keiner der möglichen Wahrheitswertverteilungen durch die Wahrheitswerte der Konstituenten festgelegt ist, sind **nicht wahrheitsfunktional**.
- Satzoperatoren, für die der Wahrheitswert des komplexen Satzes bei einigen Wahrheitswertverteilungen durch die Wahrheitswerte der Konstituenten festgelegt ist, bei anderen nicht, nennt man **partiell wahrheitsfunktional**.

Wahrheitsfunktionale Operatoren

(1) *Karla geht ins Theater und Heinz geht ins Kino.*

Satzoperator: ... **und** ...

Satzkonstituente **A**: Karla geht ins Theater.

Satzkonstituente **B**: Heinz geht ins Kino.

Wahrheitswertverlauf: w, f, f, f

Wahrheitstabelle für (1):

A	B	A und B
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

(2) *Es ist nicht der Fall, dass Marlene fliegen kann.*

Operator: **Es ist nicht der Fall, dass**

Konstituente **A**: Marlene kann fliegen

Wahrheitswertverlauf: f, w

Wahrheitstabelle für (2):

A	Es ist nicht der Fall, dass A
w	f
f	w

Wahrheitsfunktionale Operatoren

(3) *Otto ist krank oder er hat den Termin vergessen.*

Satzoperator: ... **oder** ... *

Satzkonstituente **A**: Otto ist krank.

Satzkonstituente **B**: Otto hat den Termin vergessen.

Wahrheitswertverlauf: w, w, w, f

Wahrheitstabelle für (3):

A	B	A oder B
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

* *einschliessendes Oder*

(4) *Hugo ist entweder ein Ritter oder ein Schurke.*

Satzoperator: **entweder** ... **oder** ... **

Satzkonstituente **A**: Hugo ist ein Ritter.

Satzkonstituente **B**: Hugo ist ein Schurke.

Wahrheitswertverlauf: f, w, w, f

Wahrheitstabelle für (4):

A	B	Entweder A oder B
w	w	f
w	f	w
f	w	w
f	f	f

** *ausschliessendes Oder*

Wahrheitsfunktionale Operatoren

(5) *Es ist richtig, dass Kurt Cobain 1994 Selbstmord beging.*

Satzoperator: **Es ist richtig, dass** ...

Konstituente **A**: Kurt Cobain beging 1994 Selbstmord.

Wahrheitswertverlauf: w, f

Wahrheitstabelle für (5):

A	Es ist richtig, dass A
w	w
f	f

(6) *Karlchen ist zwar todmüde, quengelt aber trotzdem nicht.*

Satzoperator: **Zwar... , aber trotzdem nicht** ...

Satzkonstituente A: Karlchen ist todmüde.

Satzkonstituente B: Karlchen quengelt.

Wahrheitswertverlauf: f, w, f, f

Wahrheitstabelle für (6):

A	B	Zwar A, aber trotzdem nicht B
w	w	f
w	f	w
f	w	f
f	f	f

Partiell & nicht wahrheitsfunktionale Operatoren

(7) *Der Prinz weiss, dass Rumpelstilzchen hinter dem Anschlag steckt.*

Satzoperator: **Der Prinz weiss, dass**

Satzkonstituente **A**: Rumpelstilzchen steckt hinter dem Anschlag.

Wahrheitstabelle für (7):

A	Der Prinz weiss, dass A
w	?
f	f

partiell wahrheitsfunktional

(8) *Der Prinz glaubt, dass Rumpelstilzchen hinter dem Anschlag steckt.*

Satzoperator: **Der Prinz glaubt, dass ...**

Satzkonstituente **A**: Rumpelstilzchen steckt hinter dem Anschlag.

Wahrheitstabelle für (8):

A	Der Prinz glaubt, dass A
w	?
f	?

nicht wahrheitsfunktional

Wahrheitsfunktional?

(9) Es trifft zu, dass Lissabon eine schöne Stadt ist.

ja

(10) Es ist umstritten, ob Kriege moralisch gerechtfertigt werden können.

nein

(11) Das Buch steht weder im Regal noch liegt es auf dem Schreibtisch.

ja

(12) Dass Astrid Geschwister hat, folgt daraus, dass Nikki ihre Nichte ist.

partiell

(13) Die Busse fahren auch Sonntags und jeder weiss das.

partiell

(14) Es wird oft behauptet, dass Bielefeld existiert.

nein

Wahrheitsfunktional

Satzoperatoren sind **wahrheitsfunktional** gdw. der Wahrheitswert der mit ihnen gebildeten Sätze eine Funktion der Wahrheitswerte der Satzkonstituenten ist.

Wahrheitstabelle für (9):

A	Es ist trifft zu, dass A
w	w
f	f

Wahrheitstabelle für (11):

A	B	Weder A, noch B
w	w	f
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Nicht wahrheitsfunktional

Der Wahrheitswert komplexer Sätze, die mit Hilfe **nicht wahrheitsfunktionaler** Satzoperatoren gebildet werden, hängt nicht vom Wahrheitswert der Konstituenten ab.

Wahrheitstabelle für (10):

A	Es ist umstritten, dass A
w	?
f	?

Wahrheitstabelle für (14):

A	Es wird oft behauptet, dass A
w	?
f	?

Partiell Wahrheitsfunktional

Der Wahrheitswert komplexer Sätze, die mit Hilfe **partiell wahrheitsfunktionaler** Satzoperatoren gebildet werden, hängt nur für bestimmte (mindestens eine, aber nicht alle der möglichen) Wahrheitswertverteilungen auf die Konstituenten ab.

Wahrheitstabelle für (12):

A	B	A folgt aus B
w	w	?
w	f	?
f	w	f
f	f	?

Wahrheitstabelle für (13):

A	A und jeder weiss, dass A
w	?
f	f

Junktoren

- Die **Junktoren** der Aussagenlogik sind wahrheitsfunktionale Satzoperatoren.
- Die vier wichtigsten Junktoren der Aussagenlogik:
 1. Negation \neg („nicht“)*
 2. Konjunktion \wedge („und“)*
 3. Adjunktion \vee („oder“)*
 4. Konditional \rightarrow („wenn ...dann ...“)*
- Mit Hilfe dieser vier Junktoren lassen sich viele der logisch relevanten Beziehungen zwischen Aussagen erfassen.
- Alle zweistelligen Junktoren lassen sich auf diese vier Junktoren zurückführen.
- * Vorsicht! Die Bedeutung der Junktoren entspricht in mancher Hinsicht nicht derjenigen der angegebenen deutschen Wörter. (Exakter ist es deshalb, vom Negations-, Konjunktions- und Adjunktionszeichen bzw. vom Zeichen für das Konditional zu sprechen.)

25.03.2019

Prof. Dr. Katia Saporiti, Einführung in die formale Logik I, Vorlesung 5

Seite 15

Wahrheitstafeln für Junktoren: Negation und Konjunktion

(1) Negation („nicht“)

A	$\neg A$
w	f
f	w

1-stelliger Junktor

Wahrheitswertverlauf: f, w

(A ist der **negierte Satz**, die **negierte Aussage**)

Alternative Zeichen: „ – “, „ – “

(2) Konjunktion („und“)

A	B	$A \wedge B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

2-stelliger Junktor

Wahrheitswertverlauf: w, f, f, f

(A und B heissen **Konjunktionsglieder**)

Alternative Zeichen: „ . “, „ & “

25.03.2019

Prof. Dr. Katia Saporiti, Einführung in die formale Logik I, Vorlesung 5

Seite 16

Adjunktion und Konditional

(3) Adjunktion („oder“)

A	B	$A \vee B$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

2-stelliger Junktor

Wahrheitswertverlauf: w, w, w, f

(A und B heißen **Adjunktionsglieder**)

(4) Konditional / materiale Implikation („wenn, dann“)

A	B	$A \rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Die materiale Implikation ist nicht identisch mit der Folgerungsbeziehung!



2-Stelliger Junktor

Wahrheitswertverlauf: w, f, w, w

(A heißt **Antezedens** oder **Vordersatz**, B heißt **Konsequens** oder **Nachsatz**)

Alternatives Zeichen: „ \supset “

Das Bikonditional

(5) Bikonditional („genau dann, wenn“ / „dann und nur dann, wenn“)

A	B	$A \leftrightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

2-stelliger Junktor

Wahrheitswertverlauf: w, f, f, w

Alternatives Zeichen: „ \equiv “

Das Bikonditional ist nicht identisch mit der Äquivalenzbeziehung!

Zurückführung auf Konditional und Konjunktion:

A	B	$A \leftrightarrow B$	$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
w	w	w	w
w	f	f	f
f	w	f	f
f	f	w	w

Die Kontravalenz

(6) Kontravalenz / Disjunktion („ausschliessendes oder“/ „entweder, oder“)

2-stelliger Junktor

Wahrheitswertverlauf: f, w, w, f

(A und B heissen *Disjunktionsglieder*)

A	B	$A \times B$
w	w	f
w	f	w
f	w	w
f	f	f

- Adjunktion: $A \vee B$ („A oder B, oder beides“) – einschliessendes Oder
- Disjunktion: $A \times B$ („A oder B, aber nicht beides“) – ausschliessendes Oder
- (Vorsicht: Beides, das ausschliessende und das einschliessende Oder werden mitunter als Disjunktion bezeichnet und man spricht von *disjunktivischen* Aussagen.)

Zurückführung des Konditionals auf Negation und Adjunktion

... und Überprüfung mit Hilfe einer Wahrheitstafel

A	B	$A \rightarrow B$	$\neg A$	\vee	B
w	w	w	(f)	w	(w)
w	f	f	(f)	f	(f)
f	w	w	(w)	w	(w)
f	f	w	(w)	w	(f)

Note: In the original image, there are orange brackets on the left side of the table, and a dashed arrow at the bottom pointing from the 'A' and 'B' columns to the 'A → B' column. An orange arrow at the top points from the '∨' column to the 'A → B' column.

4 mögliche Wahrheitswertverteilungen

Wahrheitswertverlauf: w, f, w, w

Zurückführung der Adjunktion auf Negation und Konjunktion

... und Überprüfung mit Hilfe einer Wahrheitstafel

A	B	$A \vee B$	$\neg(\neg A \wedge \neg B)$
w	w	w	w (f) (f) (f)
w	f	w	w (f) (f) (w)
f	w	w	w (w) (f) (f)
f	f	f	f (w) (w) (w)

4 mögliche Wahrheitswertverteilungen

Wahrheitswertverlauf: w, w, w, f

Zurückführung der Kontravalenz auf Negation und Konjunktion

... und Überprüfung mit Hilfe einer Wahrheitstafel

A	B	$A \times B$	$\neg(A \wedge B) \wedge \neg(\neg A \wedge \neg B)$
w	w	f	(f) (w) f (w) (f)
w	f	w	(w) (f) w (w) (f)
f	w	w	(w) (f) w (w) (f)
f	f	f	(w) (f) f (f) (w)

4 mögliche Wahrheitswertverteilungen

Wahrheitswertverlauf: f, w, w, f

Zurückführung des Bikonditionals auf Negation und Konjunktion

... und Überprüfung mit Hilfe einer Wahrheitstafel

Hauptzeichen

A	B	$A \leftrightarrow B$	$\neg(A \wedge \neg B)$	\wedge	$\neg(B \wedge \neg A)$
w	w	w	(w) (f)	w	(w) (f)
w	f	f	(f) (w)	f	(w) (f)
f	w	f	(w) (f)	f	(f) (w)
f	f	w	(w) (f)	w	(w) (f)

Note: The main symbol 'Hauptzeichen' is indicated by an arrow pointing to the central '∧' column. A curved arrow also points from the '∧' column to the 'A ↔ B' column.

4 mögliche Wahrheitswertverteilungen

Wahrheitswertverlauf: w, f, f, w

Fin